

小貝川架桥对河道流场的影响

1. 目的

建造横跨河道的桥梁时，需要考虑桥墩对流场的影响。因为桥墩作为河道内的建筑物，减少了过水面积，洪水时引起桥墩上游水位抬高的同时，桥墩周围的河床和桥墩发生相互作用，桥墩周围产生马蹄形的漩涡。这个马蹄形的漩涡引起桥墩上游侧的河床被冲刷，更严重的发生河床被掏空。如果发生这种情况，不仅影响河床的稳定，还将影响桥梁的通行安全。

下图是福冈县御笠川上月隈橋上游侧河床被掏空的例子。根据潜水测量得到的数据，上游侧被掏空 6~7m 深，桥墩基础部分严重倾斜，迫使桥梁无法使用。



建造桥梁会引起上面提到的问题，所以建造桥梁时，需要评估桥梁对流场的影响。重点注意以下事项。

- ① 建造桥梁引起的上游侧水位上升必须控制在规定范围内
- ② 桥墩的方向应该尽量和建造前的水流方向接近
- ③ 如果桥墩建造在护坡附近，需要评价护坡附近的流速增加量

小贝川位于関東地方茨城県，规划中的首都圈中央高速公路横跨小贝川，下图中标记新建桥梁地点为高速公路横跨位置。本业务的主要目的是设定桥墩方向以及对上游水位的影响。



图-1 小貝川新建桥梁位置图

2. 解析方法

采用有限体积法，非结构网格。数值计算模式采用 Flux Difference Splitting 法

2.1 基礎方程式

在河流的二维计算中，由于河道水深远比河道宽度小，通常采用沿水深方向进行积分来简化方程。假设 U 是守恒变量， E 和 F 分别是通量矢量， S 是源项，积分后的方程通常称为二维浅水方程式。其守恒形式的基本方程如下。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + S = 0 \quad (1)$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh(S_{0x} + S_{fx}) \\ -gh(S_{0y} + S_{fy}) \end{pmatrix}$$

式中、 t ：時間、 h ：水深、 u 和 v ：分別是 x 和 y 方向的垂向平均流速、 g ：重力加速度、 S_{0x} 和 S_{0y} ：分別是 x 和 y 方向的河床坡度、 S_{fx} 和 S_{fy} ： x 、 y 方向的摩擦坡降。

假设河床高度为 z_b 、 S_{0x} 和 S_{0y} 可以通过下式计算。

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2)$$

另外、摩擦坡降 S_{fx} 以及 S_{fy} 可以用曼宁公式表达。

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (3)$$

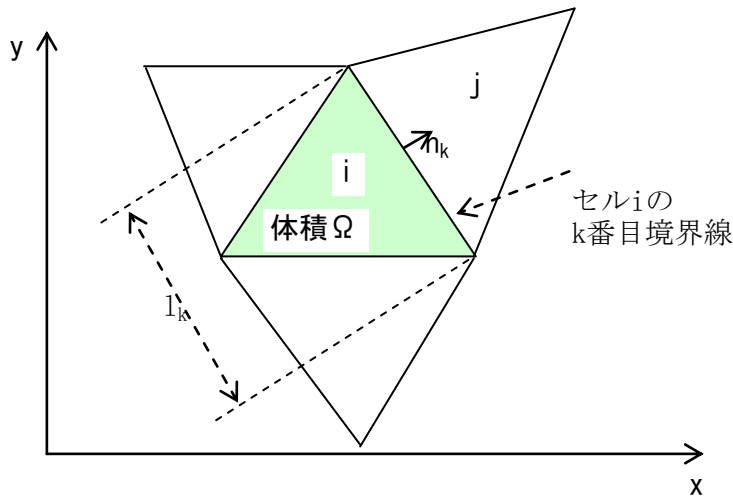


图-2 有限体積法模式図

使用有限体积法求解基本方程，把变量配置在有限单元的中心(Cell Centered Scheme 方法)，同时采用便于表达地形的非结构三角形网格，把三角形的三条边作为控制体的边界。在控制体 Ω 范围内对式(1)进行积分、利用高斯的發散定理后可以得到下式。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U dA + \oint_{\partial\Omega} (G \cdot n) dL + \int_{\Omega} S dA = 0 \quad (4)$$

$$G \cdot n = En_x + Fn_y \quad (5)$$

式中、 $\partial\Omega$ ：单元的边界线、 A ： Ω 的面積、 L ： $\partial\Omega$ 的长度、 $G \cdot n$ ：边界線 $\partial\Omega$ 的界面通量、 $n = (n_x, n_y)$ ：单元边界的外法线单位向量。

2.2 有限体積法

图-2 中、把计算领域分割成微小的三角形，微小三角形就是计算的一个单元。假设单元范围为 Ω ，可以把(4)式变换成(6)式。

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_i A_i) + \oint_{\partial\Omega_i} (G \cdot n) dL + \int_{\Omega_i} S dA = 0 \quad (6)$$

式中、 U_i ：单元*i*的守恒变量、 A ：单元*i*的面積、 $\oint_{\partial\Omega_i} (G \cdot n) dL$ ：进出单元*i*各个界面的通量总和。

時間積分採用 Euler 陽解法后、式 (6) 可以變換成是式 (7)。

$$U_i^{t+1} = U_i^t - \Delta t \left\{ \frac{1}{A_i} \left[\sum_{k=1}^3 (L_k (G \cdot n_k)) + \int_{\Omega} S dA \right] \right\} \quad (7)$$

式中、 t : 時間、 k : 構成單元 i 的邊界號碼 (1~3)、 Δt : 時間間隔、 L_k : 第 k 條邊界線的長度、 $(G \cdot n)_k$: 進出第 k 條邊界線的通量, 使用式 (5) 求解。

2.3 Flux Difference Splitting 法

式(8)是系統方程式。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

考慮把線性 Euler 方程式 $\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ 中使用的離散方法應用到系統方程組, 就是應用到雙曲線聯立方程組。

通過對系統方程組進行變形, 可以使用 Euler 方程式中的高精度迎風差分方法來求解流體力學方程式。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x} = 0$$

把式 $\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ 變換成式(9)形式, 相當於將行列式對角化。行列式

對角化就是求解 $AX = \lambda X$ 的固有向量 X 和固有值 λ 。

利用 $A = R\Lambda R^{-1}$ 、在式 (8) 左邊乘以 R^{-1} 。

$$R^{-1} \frac{\partial Q}{\partial t} + R^{-1} R \Lambda R^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

可以认为 R^{-1} 随时间，空间的变化很小、把 R^{-1} 当成定值，(10) 式可以变换成 (11) 式。

$$\frac{\partial(R^{-1}Q)}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial(R^{-1}Q)}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

通过上述变换，把方程组变换成 3 个独立的 scalar 方程式。

式中、特性速度 Λ 体现物理现象的输送速度、利用 scalar 的迎风格式差分方法，可以写成

$$(\Lambda R^{-1}Q)_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\Lambda(R^{-1}Q)_{j+1} + \Lambda(R^{-1}Q)_j - |\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)) \quad (12)$$

向(12)式左乘固有矩阵，得到式 (13)

$$(RAR^{-1}Q)_{j+1/2} = \frac{1}{2}(RAR^{-1}Q)_{j+1} + (RAR^{-1}Q)_j - R|\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j) \quad (13)$$

假设 $D = AQ = (RAR^{-1})Q$ ，通过变形得到式 (14)

$$D_{j+1/2} = \frac{1}{2}(D_{j+1} + D_j - R|\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)) \quad (14)$$

以上的迎风格式差分法中，使用了流体力学计算中非常重要的变数 α

$$\alpha_{j+1/2} = R_{j+1/2}^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)$$

单元界面 $j+1/2$ 的通量，利用交界面左侧 j 和右侧 $j+1$ 的变量，通过求解 Riemann 问题得到界面处的数值通量。在求解 Riemann 问题时使用 ROE 平均。

平面 2 次元浅水流方程式中、进行下面的变换。

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E &= \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ \frac{U_2^2}{U_1} + \frac{g}{2}U_1^2 \\ \frac{U_2 \cdot U_3}{U_1} \end{pmatrix} \\
F &= \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ \frac{U_2 \cdot U_3}{U_1} \\ \frac{U_3^2}{U_1} + \frac{g}{2}U_1^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{15}$$

把式(1)改写成 $\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$ 形式的 Euler 方程式。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial U} \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial n}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial n} + S = 0 \tag{16}$$

假设 $n_x = \frac{\partial n}{\partial x}$, $n_y = \frac{\partial n}{\partial y}$, 整理后得到、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial E}{\partial U} n_x + \frac{\partial F}{\partial U} n_y \right) \frac{\partial U}{\partial n} + S = 0 \tag{17}$$

通过变换得到、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (A_E \cdot n_x + A_F \cdot n_y) \frac{\partial U}{\partial n} + S = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(G \cdot n)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial n} + S = 0 \tag{18}$$

式中、 A_E 、 A_F ：界面通量 E 和 F 的 jacobian 行列、由下式给出。

$$A_E = \frac{\partial E}{\partial U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial U_1} & \frac{\partial E_1}{\partial U_2} & \frac{\partial E_1}{\partial U_3} \\ \frac{\partial E_2}{\partial U_1} & \frac{\partial E_2}{\partial U_2} & \frac{\partial E_2}{\partial U_3} \\ \frac{\partial E_3}{\partial U_1} & \frac{\partial E_3}{\partial U_2} & \frac{\partial E_3}{\partial U_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}$$

$$A_F = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} & \frac{\partial F_1}{\partial U_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & \frac{\partial F_2}{\partial U_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial U_1} & \frac{\partial F_3}{\partial U_2} & \frac{\partial F_3}{\partial U_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$A = A_E \cdot n_x + A_F \cdot n_y = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y \\ -uvn_x + (c^2 - v^2)n_y & vn_x & un_x + 2vn_y \end{pmatrix} \quad (20)$$

式中、 $c = \sqrt{gh}$ 。

采用上述方法，界面通量可以利用迎风格式的差分方法求解。

$$\begin{aligned} (G \cdot n)_{j+1/2} &= \frac{1}{2} \{ (G \cdot n)_{j+1} + (G \cdot n)_j - R|\Lambda|R^{-1}(U_{j+1} - U_j) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (G \cdot n)_{j+1} + (G \cdot n)_j - R|\Lambda|\alpha_{j+1/2} \} \end{aligned} \quad (21)$$

把式 (21) 应用到各个界面。

$$(G \cdot n)_k = \frac{1}{2} \left\{ (G \cdot n)_R + (G \cdot n)_L - \sum_{m=1}^3 (\hat{R}^m |\hat{\Lambda}^m| \hat{\alpha}^m)_k \right\}$$

式中、 k 表示界面号码、 $\hat{\quad}$ 表示使用 Roe 平均。

下标 **L,R**: 表示计算对象单元、相邻单元。 \hat{R}^m 、 $\hat{\lambda}^m$ 、 $\hat{\alpha}^m$ 表示使用 Roe 平均。Roe 平均通过下式进行计算。

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{\sqrt{h_L} u_L + \sqrt{h_R} u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}} & \hat{v} &= \frac{\sqrt{h_L} v_L + \sqrt{h_R} v_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}} \\ \hat{c} &= \sqrt{g \frac{h_L + h_R}{2}} & \hat{h} &= \frac{h_R + h_L}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

右固有向量 R 、固有值向量 Λ 以及 α 使用以下各式进行计算。

➤ 右固有向量

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{R}^{11} & \hat{R}^{12} & \hat{R}^{13} \\ \hat{R}^{21} & \hat{R}^{22} & \hat{R}^{23} \\ \hat{R}^{31} & \hat{R}^{32} & \hat{R}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \hat{u} + \hat{c}n_x & -\hat{c}n_y & \hat{u} - \hat{c}n_x \\ \hat{v} + \hat{c}n_y & \hat{c}n_x & \hat{v} - \hat{c}n_y \end{pmatrix} \quad (23)$$

➤ 向量的固有值

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}n_x + \hat{v}n_y + \hat{c} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u}n_x + \hat{v}n_y & 0 \\ 0 & 0 & \hat{u}n_x + \hat{v}n_y - \hat{c} \end{pmatrix} \quad (24)$$

➤ R 行列的逆行列 R^{-1}

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-\hat{u}n_x - \hat{v}n_y + \hat{c}}{2\hat{c}} & \frac{n_x}{2\hat{c}} & \frac{n_y}{2\hat{c}} \\ \frac{\hat{u}n_y - \hat{v}n_x}{\hat{c}} & -\frac{n_y}{\hat{c}} & \frac{n_x}{\hat{c}} \\ \frac{\hat{u}n_x + \hat{v}n_y + \hat{c}}{2\hat{c}} & -\frac{n_x}{2\hat{c}} & -\frac{n_y}{2\hat{c}} \end{pmatrix} \quad (25)$$

➤ 物理量 α

$$\hat{\alpha}_{j+1/2} = \hat{R}^{-1}(Q_{j+1} - Q_j) = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}^1 \\ \hat{\alpha}^2 \\ \hat{\alpha}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta h}{2} + \frac{1}{2\hat{c}} \{ \Delta(uh)n_x + \Delta(vh)n_y - (\hat{u}n_x + \hat{v}n_y)\Delta h \} \\ \frac{1}{\hat{c}} \{ (\Delta(vh) - \hat{v}\Delta h)n_x - (\Delta(uh) - \hat{u}\Delta h)n_y \} \\ \frac{\Delta h}{2} - \frac{1}{2} \{ \Delta(uh)n_x + \Delta(vh)n_y - (\hat{u}n_x + \hat{v}n_y)\Delta h \} \end{pmatrix} \quad (26)$$

式中、 $\Delta(x) = (x)_R - (x)_L$ 。

$$\hat{R}|\hat{\Lambda}|\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{R}^{11}|\hat{\lambda}^1|\hat{\alpha}^1 + \hat{R}^{12}|\hat{\lambda}^2|\hat{\alpha}^2 + \hat{R}^{13}|\hat{\lambda}^3|\hat{\alpha}^3 \\ \hat{R}^{21}|\hat{\lambda}^1|\hat{\alpha}^1 + \hat{R}^{22}|\hat{\lambda}^2|\hat{\alpha}^2 + \hat{R}^{23}|\hat{\lambda}^3|\hat{\alpha}^3 \\ \hat{R}^{31}|\hat{\lambda}^1|\hat{\alpha}^1 + \hat{R}^{32}|\hat{\lambda}^2|\hat{\alpha}^2 + \hat{R}^{33}|\hat{\lambda}^3|\hat{\alpha}^3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

2.4 河床坡降

河床坡降项的处理，影响到计算的稳定。在这里处理方法参考对流项的计算方法，采用特征分解和迎风处理。

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{bmatrix}$$

以单元 i 为对象，在控制体 Ω 范围内进行积分、利用高斯发散定理得到下式。

$$\int_{\Omega} S_0 dA = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{bmatrix} dA = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} 0 \\ -gh z_b n_x \\ -gh z_b n_x \end{bmatrix} l_{ij}$$

式中、 m ：多角形单元 i 的边数。

2.4 底面摩擦坡降

底面摩擦坡降项、进行半隐式处理。

$$S' = (1 - \theta)(S')^n + \theta(S')^{n+1} = (S')^n + \theta \frac{\partial S_f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t$$

3. 河道地形以及网格分割

3.1 设定粗率系数

计算对象范围是小贝川 31k800~32k600。把河道分成低水和高滩部分，分别取不同的粗率系数，数值如下。

➤ 低水部分 $n=0.031$

➤ 高滩部分 $n=0.040$

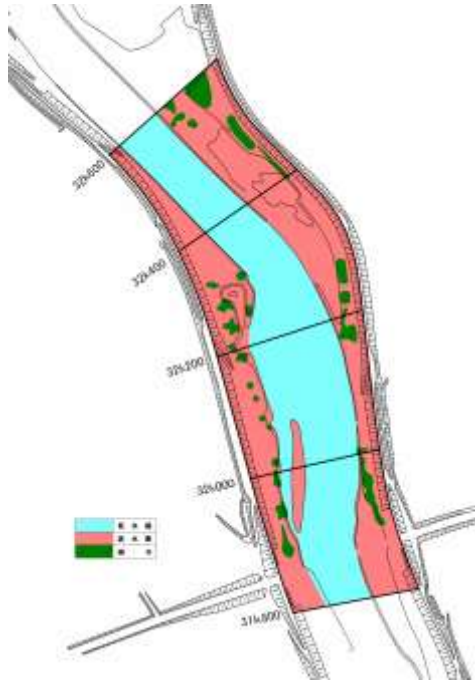


图-3 设定低水和高滩部分

3.2 切割河道

采用三角形网格切割河道。为了能够体现桥墩的形状，切割时桥墩附近使用小网格，其他区域使用相对大的网格，尽量使网格均匀变化。

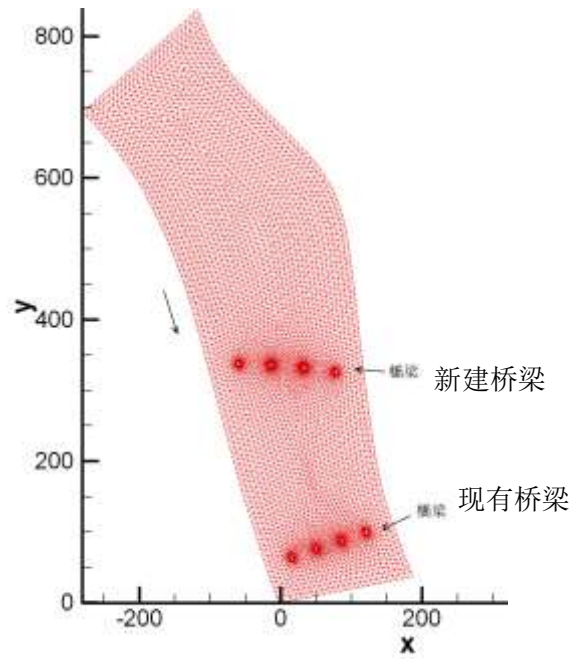


图-4 用三角形网格切割河道

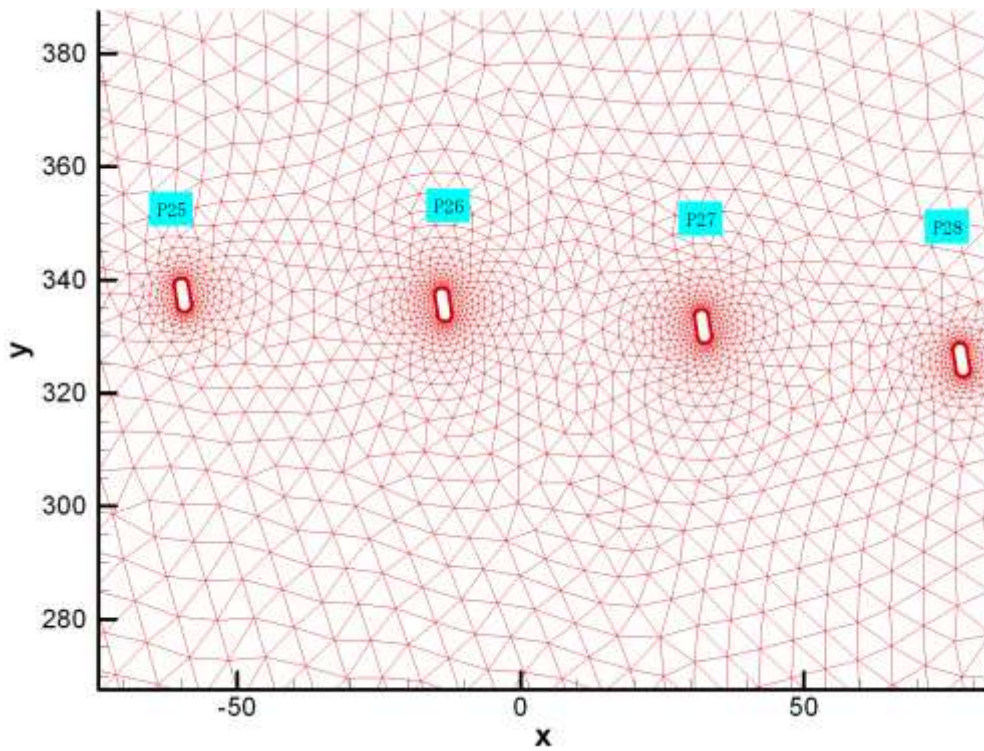
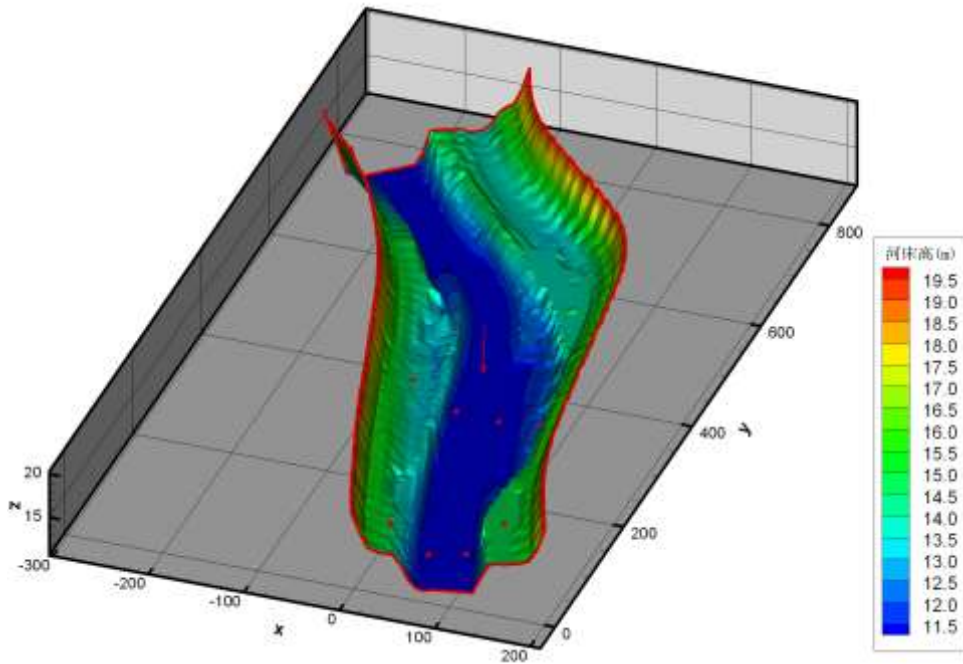


图-5 新建桥梁附近的网格放大图

3.3 河道地形

经过上述网格切割后得到的地形图如下。

河道内部的红色部分表示桥墩，计算时把桥墩当成不过水的内部边界。



4. 二维计算条件

4.1 边界条件

在上游端给出流量和下游端给出水位边界条件。

- 下流端水位 $H=17.611\text{ m}$
- 上流端流量 $Q=1,300\text{ m}^3/\text{s}$

4.2 河道地形条件

为了比较桥梁修建前后的流场，需要对新桥梁建设前（不设桥墩）和建设后（设定桥墩）的 2 case 进行计算。

5. 计算结果

对两个河道地形条件（不设桥梁和设定桥梁）分别进行计算，得到下面的流速分布图。

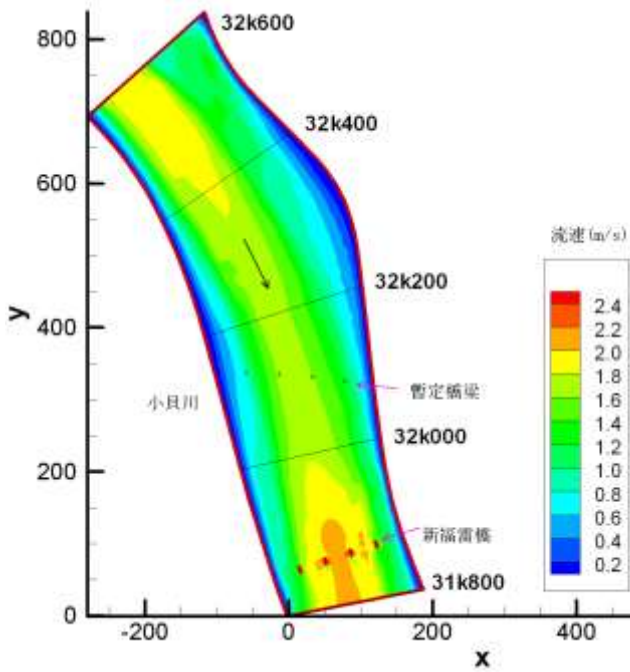


图- 桥梁建造前的流速分布

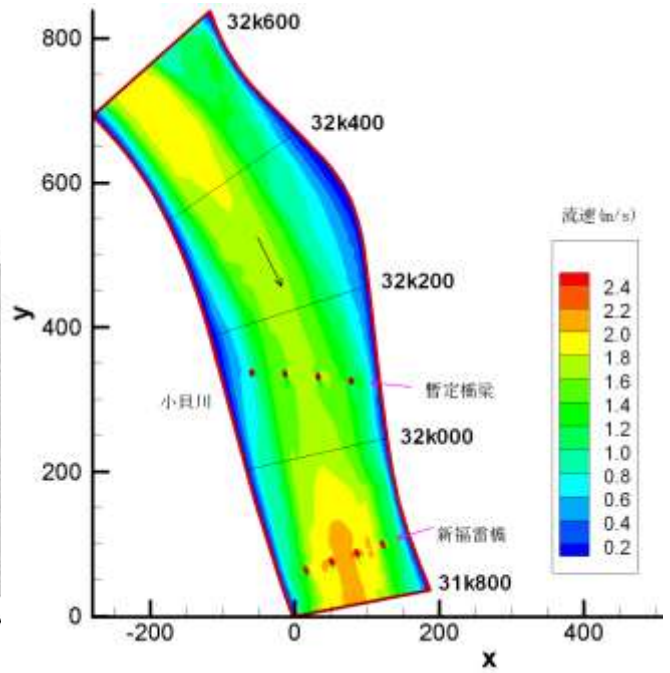


图- 桥梁建造后的流速分布

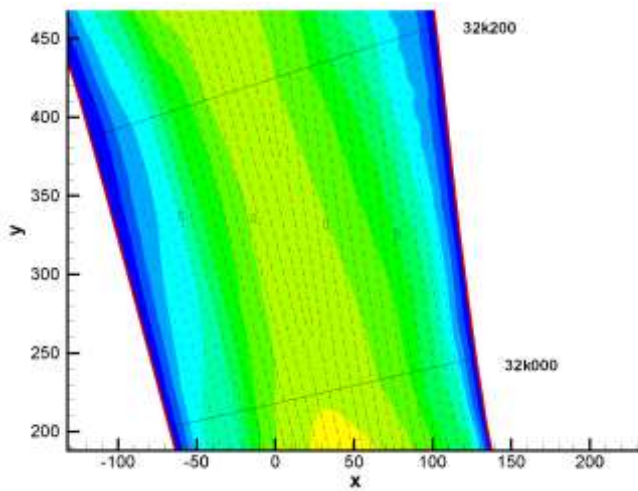


图- 桥梁建造前的桥梁附近流速

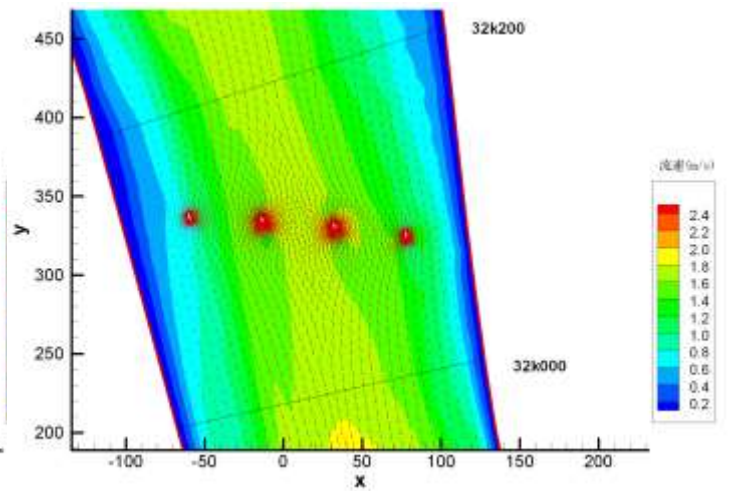


图- 桥梁建造后的桥梁附近流速